Μ. Δευτέρα 13/4 → 12:00 - 3:00

30/3/20

Υπομόδιο ($\leq$ συμβ)

Ορισμός: Έστω M ένα R-μόδιο. Ένα υποσύνολο N του M είναι R-υποδόμιο του M αν το N είναι υποομάδα του M και κλειστή ως προς τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό του M ως R-μόδιο. $\forall r \in R \ \forall n \in N : r \cdot n \in N$

(Για να δείξω το υπομόδιο)

Πόρισμα: Έστω M ένα R-μόδιο και $N \subseteq M$.
Τότε $N \leq M$

$\left.\begin{array}{l} \text{i) } N \neq \emptyset \\ \text{ii) } a \cdot \beta^{-1} \in N, \ \forall a, \beta \in N \end{array}\right\}$ υποομάδα

iii) $r \cdot a \in N, \ \forall r \in R, \ \forall a \in N$

Ορισμός: Έστω R δακτύλιος με μοναδικά R-υπομόδιά του $\{0\}$, R, τότε καλείται απλός.

Πχ: Έστω R δακτύλιος
1) Τα R-υπομόδια αυτού: τα ιδεώδη του
2) Έστω το $\mathbb{Z}$-μόδιο $\mathbb{Z}$
Τα $\mathbb{Z}$-υπομόδιά του είναι $m\mathbb{Z}$ → υποομάδες
" Γενικά τα $\mathbb{Z}$-υπομόδια μιας αβελιανής ομάδας είναι οι υποομάδες της ".

3) Έστω $\mathbb{K}$ σώμα.
Τα $\mathbb{K}$-υπομόδια του $\mathbb{K}$: $\{0\}$, $\mathbb{K}$

Ορισμός: Ένα R-μόδιο M λέγεται πεπερασμένα παραγόμενο αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολό του $X \subseteq M$: $M = \langle X \rangle$ σύνολο γεννητόρων του M
Αν $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ με $\langle X \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = Rx_1 + Rx_2 + \ldots + Rx_n$: συντελεστής του R,
R συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_n$.

Ορισμός: Ένα R-μόδιο M λέγεται κυκλικό αν $\exists\, \mu \in M$: $M = \langle \mu \rangle$

Πχ 1) Κάθε κυκλική ομάδα M είναι ένα κυκλικό $\mathbb{Z}$-μόδιο M.

Κάθε κυκλική ομάδα είναι και αβελιανή !!!

2) Έστω το R-μόδιο R
Τα κυκλικά υπομόδιά του: τα κύρια ιδεώδη του
κύρια
$\mathbb{Z} \to$ τα ιδεώδη $m\mathbb{Z} = \langle m \rangle$

3) Γενικά τα κυκλικά $\mathbb{Z}$-υπομόδια μιας οποιασδήποτε αβελιανής ομάδας είναι οι κυκλικές υποομάδες της

Πχ 1) Γενικά, κάθε υποομάδα κυκλικής ομάδας είναι επίσης κυκλική.
ΔΕΝ ισχύει το αντίστοιχο στα μόδια
δεν αληθεύει ότι κάθε υπομόδιο κυκλικού μοδίου είναι επίσης κυκλικό.

Αντιπαράδειγμα: $\to$ πολ/μα με συντ. από το $\mathbb{Z}$

Θεωρώ το $\mathbb{Z}[x]$ ως $\mathbb{Z}[x]$-μόδιο. Προφανώς

$\mathbb{Z}[x] = \langle 1_{\mathbb{Z}[x]} \rangle$ κυκλικό.

Κάθε R δακτύλιος είναι κυκλικό R-μόδιο

$R = \langle 1_R \rangle$ $\quad \forall a \in R \quad a = a \cdot 1_R$

Θεωρώ το ιδεώδες $I = \langle x, 2 \rangle$ ως $\mathbb{Z}[x]$ υπομόδιο του $\mathbb{Z}[x]$

$= \{ a_1(x) \cdot x + a_2(x) \cdot 2 \}$ (οι συντελεστές $\in \mathbb{Z}[x]$)

Έστω αντίθετα ότι $\exists\ k(x)$ τ.ω.

$I = \langle x, 2 \rangle = \langle k(x) \rangle$

$2 \in \langle k(x) \rangle$ και $x \in \langle k(x) \rangle$

$2 = \lambda(x) k(x) \Rightarrow 0 = \det(\lambda(x)) + \det(k(x))$

$\lambda \in \mathbb{Z}[x] \qquad \Rightarrow \deg(\lambda(x)) = \deg(k(x)) = 0$

$\lambda(x), k(x)$ σταθερά

$2 = \lambda(x) \cdot k(x) \overset{2 \text{ πρώτος}}{\Longrightarrow} k(x) \in \{\pm 1, \pm 2\}$

- $k(x) = \pm 1 \Rightarrow \underset{\langle 1 \rangle}{\langle k(x) \rangle} = \mathbb{Z}[x]$ άτοπο

- $k(x) = \pm 2$

$x \in \langle k(x) \rangle \Rightarrow x \in \langle 2 \rangle$

$\Rightarrow \exists\ \lambda(x) \in \mathbb{Z}[x] : x = 2 \cdot \lambda(x) \Rightarrow \lambda(x) = \frac{1}{2} x \notin \mathbb{Z}[x]$

άτοπο.

2) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-μόδιο

(Παρατήρηση: αν το $\mathbb{Q}$ το δούμε ως $\mathbb{Q}$-μόδιο καθώς $\mathbb{Q} = \langle 1_R \rangle$)

Έστω ότι $\mathbb{Q} = \langle \frac{a_1}{\beta_1}, \dots, \frac{a_k}{\beta_k} \rangle$, $a_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$

άρα κάθε ρητός γράφεται ως $\mathbb{Z}$-συνδυασμός των γεννητόρων, άρα και ο $\frac{1}{p}$, όπου $p \nmid \beta_1, \dots, \beta_k$

Δλε $\frac{1}{p} = k_1 \frac{a_1}{\beta_1} + \dots + k_k \frac{a_k}{\beta_k}$

$\Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{\text{κάτι}}{\beta_1 \dots \beta_k} \Rightarrow p \mid \beta_1 \dots \beta_k$ άτοπο.

Ομομορφισμοί

Ορισμός: Έστω R δακτύλιος και έστω M, N R-μόδιοι. Μια απεικόνιση $\varphi : M \to N$ καλείται ομομορφισμός R-μοδίων ή R-ομομορφισμός:

i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\forall x, y \in M$ (ιδιότητα ομάδων)

ii) $\varphi(r \cdot x) = r \varphi(x)$, $\forall r \in R, x \in M$

άρα ένας R-ομομορφισμός είναι ένας ομομορφισμός μεταξύ 2 αβελιανών ομάδων M, N που σέβεται τον εξωτερικό πολ/μό με τα στοιχεία του δακτυλίου

Ιδιότητες $\varphi : M \to N$

1) $\varphi(0_M) = 0_N$

2) $\varphi(-m) = -\varphi(m)$, $\forall m \in M$

3) $\varphi(m^k) = (\varphi(m))^k$

Ορισμός: Ένας R-ομομορφισμός καλείται R-ισομορφισμός αν είναι 1-1 και επί.
Αν ανάμεσα σε δύο R-μόδιους M, N υπάρχει R-ισομορφισμός $M \simeq N$.

Έστω R-ομομορφισμός $\varphi : M \to N$

Ορισμός: $\cdot \ Ker\varphi = \{x \in M : \varphi(x) = 0_N\}$

$\cdot \ Im\varphi = \{\varphi(x), x \in M\} = \{y \in N$ τ.ω. $\exists x \in M : \varphi(x) = y\}$

Θεώρημα Θεωρούμε τους R-ομομορφισμούς
$\varphi: M \to N$, $\psi: N \to K$ (M, N, K R-μόδια)
1) η απεικόνιση $\varphi': M \to K$ είναι R-ομομορφισμός αν-ν $\varphi'(rx+y) = r\varphi'(x) + \varphi'(y)$, $\forall x, y \in M, r \in R$
2) $\psi \circ \varphi = \psi(\varphi(x)): M \to K$ είναι R-ομομορφισμός

Απόδειξη
(1)($\Rightarrow$) Έστω φ': R-ομομορφισμός
$$\varphi'(rx+y) = \varphi'(rx) + \varphi'(y)$$
$$= r\varphi'(x) + \varphi'(y)$$

Αντίστροφα, (1)($\Leftarrow$) Έστω $\varphi'(rx+y) = r\varphi'(x) + \varphi'(y)$
$\forall x, y \in M, r \in R$

- Παρατηρώ ότι για $y = 0_M$
$$\varphi'(rx + 0_M) = r\varphi'(x) + \varphi'(0_M)$$
$$\Rightarrow \varphi'(rx) = r\varphi'(x) + 0_K$$
$$\Rightarrow \varphi'(rx) = r\varphi'(x)$$

- Παρατηρώ ότι για $r = 1_R$
$$\varphi'(1_R x + y) = 1_R \varphi'(x) + \varphi'(y)$$
$$\Rightarrow \varphi'(x+y) = \varphi'(x) + \varphi'(y)$$

(2) αρκεί νδο $(\psi\circ\varphi)(rx+y) = r((\psi\circ\varphi)(x)) + (\psi\circ\varphi)(y)$
$$(\psi\circ\varphi)(rx+y) = \psi(\varphi(rx+y)) \xrightarrow[(1)]{\varphi \text{ R-ομ.}} \psi(r\varphi(x) + \varphi(y))$$
$$\xrightarrow{\psi \text{ R-ομομ}} r\psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) = r((\psi\circ\varphi)(x)) + (\psi\circ\varphi)(y)$$

Ορισμός Ορίζουμε το σύνολο όλων των R-ομομορφισμών $M \to N$
A) $Hom_R(M, N) = \{\varphi : \varphi\ M \to N$ είναι R-ομομορφισμός$\}$

B) Ο δακτύλιος $Hom_R(M, M)$ καλείται δακτύλιος ενδομορφισμών του M. $End_R(M) = Hom_R(M, M)$

Παρατηρήσεις:

1) Κάθε R-ομομορφισμός είναι και ομομορφισμός των αντίστοιχων αβελιανών ομάδων.
(λόγω της ιδιότητας (i))
Το αντίστροφο δεν ισχύει! (δεν γνωρίζω αν ισχύει η (ii) ιδιότητα)

2) Έστω R-δακτύλιος και M R-μόδιο. Οι R-ομομορφισμοί δεν είναι απαραίτητα και ομομορφισμοί δακτυλίων (και αντίστροφα ομομορφ. δακτυλίων $\not\Rightarrow$ R-ομομορφ.)

π.χ. $R = \mathbb{Z}$ και έστω $\mathbb{Z}$-ομομ. $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$x \longmapsto 2x$, $\varphi(x) = 2x$
Είναι $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός
i) $\varphi(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = 2\varphi(x) + 2\varphi(y)$
ii) $\varphi(rx) = 2rx = r(2x) = r\varphi(x)$, $r \in \mathbb{Z}$

Παρατηρούμε ότι, $\varphi(1_{\mathbb{Z}}) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 1_{\mathbb{Z}}$
άρα όχι ομομορφ. δακτυλίων.

Αντίστροφα, έστω $\varphi: \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$, $R = \mathbb{K}[x]$
$x \longmapsto x^2$, $\varphi(x) = x^2$, είναι ομομορφ. δακτυλίων
Παρατηρούμε ότι,
$x^2 = \varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x\varphi(1) = x \cdot 1 = x$ αδύνατο